# TD$_{15}$ – Intégrales à paramètre

## Exercice 1 ★★

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_F$ de $F$. Étudier la parité de $F$.
2. Montrer que $F$ est continue sur son ensemble de définition
3. Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D_F$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $F$ et en déduire une expression simple de $F(x)$

## Exercice 2 ★★

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Étudier la parité de $F$.
2. Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (*on pourra utiliser une domination locale*), et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par $F$ et en déduire une expression simple de $F(x)$ *On pourra utiliser le fait que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## Exercice 3 ★★

On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (*on pourra utiliser une domination locale*)
2. Montrer que $F$ est monotone.
3. Déterminer les limites de $F$ en $+\infty$ et en 0. On commencera par justifier que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{1}{x}\right]$,

$$\mathrm{e}^{-tx} \geqslant 1 - tx \geqslant 0.$$

   Donner l'allure de la courbe.

## Exercice 4 ★★★

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Gamma$ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\Gamma$ est continue sur $]0, +\infty[$ (on pourra utiliser une domination locale).
3. Montrer que $\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (on pourra utiliser une domination locale) sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

4. En déduire que la fonction $\Gamma$ est convexe sur $]0, +\infty[$ (i.e. $\Gamma'' \geqslant 0$).
5. Démontrer que pour tout $x \in ]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

7. Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

## Exercice 5 ★★★

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. En déduire que $F$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin ux}{1+u}\,\mathrm{d}u$. En déduire que $F$ est impaire, de classe $\mathscr{C}^1$, et calculer sa dérivée.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

## Exercice 6 ★★★

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de $F$, puis montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_F$. Donner une expression intégrale de $F^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $I_0$ et $I_1$, puis chercher une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+2}$.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 3 de $F$ en 0, puis l'allure de la courbe de $F$ en ce point.
4. Préciser le sens de variation de $F$ sur $\mathscr{D}_F$, puis déterminer les limites aux bornes. Tracer l'allure de la courbe.

## Exercice 7 ★★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de $f$.

1. Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère désormais la fonction $f$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\hat{f}'$ et en déduire la valeur de $f$. On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## Exercice 8 ★★★

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f$ définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+t^3}\,\mathrm{d}t$.

## Exercice 9 ★★★

Soit $f$ définie pour $x > 0$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x)$ est bien définie
2. Montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^0, \mathscr{C}^1, \mathscr{C}^\infty$ (on pourra utiliser une hypothèse de domination locale) et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$.

3. Étudier les variations de $f$, ses limites et tracer son graphe.
4. Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle $(E)$ linéaire du premier ordre. En déduire toutes les solutions de $(E)$.

## Exercice 10 ★★

Soit $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f' + g' = 0$.
3. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

## Exercice 11 ★★★★

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(\theta) = \ln(1 - \sin(\theta)^2)$$

1. Montrer que $f$ est intégrable sur $[0\,,\,\frac{\pi}{2}[$.
2. On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + t \times \sin(\theta)^2)\,\mathrm{d}\theta$$

   (a) Montrer que $F$ est bien définie et est continue sur $[-1\,,\,+\infty[$

   (b) Établir que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,,\,+\infty[$ et que

$$\forall t \in ]-1\,,\,+\infty[ \qquad F'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^2}{1 + t \times \sin(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

3. (a) En posant le changement de variable $u = \tan(\theta)$, montrer que, pour tout $t \in ]-1, +\infty[$,

$$F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t} \times (1 + \sqrt{1+t})}$$

   (b) En déduire que, pour tout $t \in ]-1, +\infty[$,

$$F(t) = \pi \times \left(\ln(1 + \sqrt{1+t} - \ln(2)\right)$$

# Exercices issus d'oraux

## Exercice 12 ★★★
*(Oral 2018)*

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $s(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ et pour $x \in \mathbb{R}, S(x) = \displaystyle\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t$.

Enfin pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $s$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $S$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout $x \neq 0$ , $S(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x} + \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que $f$ est définie sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. *On pourra commencer par le faire sur* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.
7. Calculer $f(x)$.
8. En admettant la continuité de $f$ en $0$ , calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

## Exercice 13 ★★★
*(Oral 2014, 2018)*

Pour $x \in ]-1, +\infty[$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer le sens de variations de $f$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3\,(1-t+t^2)}$$
et en déduire la valeur de $f(0)$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
4. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $f$.
5. En déduire $f$.

## Exercice 14 ★★★
*(Oral 2008)*

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $T(f)$ la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'application $T$ ainsi définie est un endomorphisme de $E$
2. Déterminer les éléments propres de $T$.